

**参赛编号：010270**

**B 题 城市垃圾分类运输的路径优化与调度**

# 城市垃圾分类运输的路径优化与调度

## 摘要

随着我国城市化进程加速，城市生活垃圾清运量达 4 亿吨/年，亟需通过数学模型优化多类垃圾协同运输路径，统筹车辆载重限制、中转站容量及时间窗口等约束，实现高效低碳的垃圾分类运输体系。本文针对城市垃圾分类运输的路径优化与调度问题，构建了多阶段数学模型并提出改进启发式算法。

针对问题一的单一车辆路径优化，建立了带容量约束的可拆分车辆路径模型（SD-VRP），采用微分思想，将收集点微分为很近的子收集点，转化为不可拆分的带容量约束路径优化模型（CVRP），采用改进粒子群算法求解，再将路径合并，获得总行驶距离 1041 公里的最优方案，需 14 辆载重 5 吨的车辆，较传统 CVRP 模型减少 4.3%，充分利用了载重资源。

问题二在模型一基础上扩展至四类垃圾（厨余、可回收、有害、其他）及其专用车辆，建立多车辆协同路径规划模型，以最小化全局运输成本为目标。在考虑不同类型车辆容量与单位运输成本的基础上，分别构建 CVRP 模型，采用分类型独立优化策略并叠加成本，获取最小全局运输开销，实现总运输成本 2958.3 元。此外，引入车辆每日最大行驶时间约束，分析时间约束对路径和成本的影响，证明时间约束会显著提高运输成本。

问题三提出两阶段综合优化模型，通过 k-means 聚类结合惩罚项约束选定 4 个中转站选址，分解为收集点-中转站和中转站-处理站两层优化问题；对于题目要求的运输成本-二氧化碳排放量双目标优化，通过二维优化方式，设置成本优化层和排放优化层，将上层模型的输出作为下层模型的初始化输入，协同优化，最小化运输成本 4818 元和碳排放 2165kg，同时，扩展非对称路网建模方式，考虑实际路况（单行道/禁行时段），将对称距离矩阵转换为有向图，增强模型现实适应性。

最后，对模型进行了检验、评价与推广。

**关键字：** VRP SDVRP 粒子群算法 双目标优化

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

随着城市化进程的加速，我国生活垃圾产量持续攀升，从 2004 年成为全球垃圾产量最大的国家，到 2023 年垃圾清运量已达 4 亿吨，我国城市垃圾处理能力面临着严峻的挑战。垃圾分类运输作为环境治理的核心环节，如何通过数学模型方法统筹考虑多类垃圾的差异化收集需求、运输车辆的载重与容积限制、中转站的处理能力及时间窗口约束、平衡运输成本与碳排放控制等诸多方面的因素，从而提升效率并降低成本，已成为城市管理领域亟待解决的关键问题。

## 1.2 问题要求

问题围绕城市垃圾分类运输的路径优化与调度展开，需要建立数学模型解决以下问题：

**问题 1：**针对单一车辆类型下的基础路径优化与调度，强调仅需单一类型垃圾（厨余垃圾），在给定收集点坐标、垃圾量及车辆载重限制的条件下，建立数学模型以最小化总行驶距离，确定车辆数量、路径规划及任务分配。同时，针对 30 个收集点的具体数据，包括运输车辆最大载重为 5 吨，设计算法求解最优方案，并分析模型的时间复杂度与局限性。

**问题 2：**针对多车辆协同与载重约束下的优化，将垃圾类别扩展至 4 类垃圾，分别是厨余垃圾、可回收垃圾、有害垃圾和其他垃圾，每类需专用车辆运输，考虑不同车辆的载重、容积及成本差异，建立多车辆协同运输模型以最小化总成本。同时，在收集点产生多类垃圾的场景下，将问题一的算法扩展至多类型调度，分析约束条件变化并求解出最优解。此外，新增车辆每日最大行驶时间约束，举例探讨其对路径规划的影响。

**问题 3：**针对含中转站选址与时间窗口的综合优化，需要结合中转站选址、路径优化与碳排放控制，建立综合模型以最小化运输与建设成本。同时，设计两阶段算法并说明其关联协同机制：第一阶段确定中转站选址与收集点分配；第二阶段优化各中转站内的车辆路径。此外，如果实际路网存在单行道、进行时段等非对称约束，考虑通过对比复杂度差异，优化距离矩阵并调整模型。

## 二、问题分析

### 2.1 问题一分析

要在单一车辆类型约束下，以最小化总行驶距离为目标，完成 30 个厨余垃圾收集点的运输任务，其核心挑战在于如何在车辆载重限制和路径闭合性的约束下，合理分配收集点到不同车辆的运输路径，并允许车辆多次往返以降低总行驶距离，且需要考虑垃圾站的运输是否可拆分。首先该类问题可建模为有拆分的带容量约束的车辆路径旅行商问题（SDVRP），只是本问题暂时不需要考虑运输成本等限制因素，以距离最小化为目标函数即可。之后利用启发式算法生成最优路径，并通过动态规划优化车辆调度次数，最终求解得最优模型。最终可以从实际交通动态及车辆速度差异等方面考虑本模型的局限性与改进方向。

### 2.2 问题二分析

在扩展至四类垃圾及对应专用车辆的协同调度背景下，以最小化总运输成本为目标。由于不同车辆类型存在载重、容积及单位运输成本的差异，但考虑到不同车辆的运输完全独立，可以建立 4 个形式相同的单目标优化模型，通过统筹分配同一收集点的多类垃圾任务，并避免车辆资源冲突。算法方面，可在问题一的启发式算法基础上，通过分类型独立规划路径、引入成本目标函数进行扩展，但需额外处理时间约束对任务连续性的影响，例如通过拆分超时任务或动态调整路径。

### 2.3 问题三分析

问题三是问题一与问题二的结合与升级，需综合优化中转站选址、路径规划及碳排放控制，目标是最小化运输与建设成本总和。核心难点在于中转站容量、时间窗口与路网非对称性等多因素耦合。同时需要通过两阶段算法实现：第一阶段基于聚类分析和候选点参数确定中转站选址与收集点分配，第二阶段针对各中转站独立优化多类车辆路径，并嵌入碳排放相关公式以动态调整路径。对于非对称路网，需要将距离矩阵转为有向图，路径规划从对称 TSP 转为非对称 ATSP 问题，算法需调整邻域操作以处理方向性约束。

## 三、模型假设

为简化问题，本文做出以下假设：

1. 道路畅通，不存在拥堵时间。
2. 不考虑垃圾车装入或倒出垃圾的时间。
3. 可以精准计算出每辆垃圾车装载垃圾的重量。

4. 不同种类垃圾车可以同时进行各自操作，不受对方影响。
5. 中转站折旧速度保持恒定。

## 四、符号说明

符号	意义
$N$	垃圾站点数量
$x_{ijt}$	表示车辆 $r$ 从垃圾站 $i$ 行驶到垃圾站 $j$
$Q$	单个车辆的最大载重
$w_i$	垃圾站 $i$ 的垃圾量
$y_{jt}$	第 $t$ 个车辆在对应路径点 $j$ 上的载重量
$d_{ij}$	从 $i$ 到 $j$ 的路径长度
$D_i$	总路径长度
$S^t$	第 $t$ 个车辆的路径
$c$	节点集合
$m$	路径总集合
$s_i$	在第 $i$ 点的时刻
$t_{ij}$	从 $i$ 到 $j$ 经历的时间
$T_h$	$h$ 中转站的容量

## 五、问题一的模型建立与求解

### 5.1 模型建立

考虑到问题一主要研究一种类型的同质垃圾运输车辆，收集点坐标及垃圾重量信息给定，发车点单一且固定，因此可以建立单一车辆类型下以距离最短为目标的旅行商优化模型。

#### 5.1.1 决策变量判定

基于问题一要求，首先为了确保路径连续性，需要设定路径选择变量  $x_{ijr}$ ，即判断该车辆是否通过对应路径，采用 0-1 规划设定：

$$x_{ijt} = \begin{cases} 1, & \text{表示车辆 } r \text{ 从垃圾站 } i \text{ 行驶到垃圾站 } j \\ 0, & \text{其他情形} \end{cases} \quad (1)$$

同时，由于车辆是同质且互不关联的，同一车辆运输多次与不同车辆运输一次在本题条件下无异，因此设定单类车辆总数  $K$ ，判断路径的总闭环数。

$$K \in \mathbb{Z}^+$$

此外，需要考虑垃圾车在运输垃圾时有重量限制，各垃圾站的垃圾重量是否可拆分，这决定了该类问题属于 CVRP 问题还是 SDVRP 问题。本文认为在该题设下各个垃圾站垃圾产生量可拆分（即为 SDVRP 问题），因此设定了车次  $t$  在节点  $j$  装载的垃圾装运量  $y_{jt}$ ，它是一个连续变量。

### 5.1.2 目标函数设置

问题一仅要求路径最小化，因此设定最短路径  $D$  的表达式：

$$\min D = \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{t=1}^K d_{ij} x_{ijt} \quad (2)$$

其中， $d_{ij}$  指的是从  $i$  过倒数第二点  $j$  最终返回  $i$  的闭环路径长度，根据题设用欧氏距离表示，距离公式如下：

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

### 5.1.3 多重约束条件

#### 1) 车辆路径连续性约束

保证所有车辆必须从编号为 0 的处理厂起点出发并返回原点，总路径环数覆盖  $N$  个垃圾站且等于  $K$ ：

$$\sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{0jt} = \sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{j0t} = K \quad (3)$$

#### 2) 流量平衡约束

同时，需要保证流量平衡约束，车辆总集合  $m$  中每辆车出入节点次数相同：

$$\sum_{i=0}^N x_{ijt} = \sum_{i=1}^N x_{jit} (t \in m, j = 1, 2, \dots, N) \quad (4)$$

#### 3) 车辆载重限制

每条路径上垃圾车运输的载重限制  $Q$ ：

$$\sum_{j=1}^N y_{jt} \leq Q (t \in m) \quad (5)$$

其中， $m$  指所有车辆构成的集合。

#### 4) 运量关联与覆盖约束

考虑到垃圾站的垃圾量  $w_i$  是可拆分的，即每个节点可以访问多次，需要设定路径与运量关联约束：

$$\sum_{i=0}^N x_{ijt} w_j \geq y_{jt} (t \in m, j = 1, 2, \dots, N) \quad (6)$$

保证垃圾站的垃圾最终都会被车辆运完，设定垃圾量覆盖约束：

$$\sum_{t=1}^K y_{jt} = w_j (j = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

## 6) 最小发车量约束

此外，设定所有存在的车辆或路径环覆盖所有的运输需求，同时隐含拆分后的虚拟节点数量为最小车次数下限：

$$K \geq \frac{\sum_{j=1}^N w_j}{Q} \quad (8)$$

## 7) 子环路消除约束

另外，为了避免形成子回路，使路径重复不连通，对于不包含起点  $C_0$  的任意节点子集  $S^t$ ，车辆  $t$  在  $S$  内部的路径数等于节点数减一：

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijt} = |S^t| - 1, S^t \subseteq C - C_0 \quad (9)$$

### 5.1.4 最终模型确定

基于如上分析，可最终建立基础旅行商路径优化模型如下式所示：

$$\begin{aligned} \min D = & \sum_{j=0}^N \sum_{i=0}^N \sum_{t=1}^K d_{ij} x_{ijt} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} \sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{0jr} = \sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{j0t} = K, \\ \sum_{i=0}^N x_{ijt} = \sum_{i=1}^N x_{jit}, \\ \sum_{j=1}^N y_{jt} \leq Q, \\ \sum_{i=0}^N x_{ijt} w_j \geq y_{jt}, \\ \sum_{t=1}^K y_{jt} = w_j, \\ K \geq \frac{\sum_{j=1}^N w_j}{Q}, \\ \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijt} = |S^t| - 1, S^t \subseteq C - C_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

其中， $t \in m, j = 1, 2, \dots, N$ 。

## 5.2 模型求解

### 5.2.1 对称距离矩阵的计算

首先，本文设定本题为 SDVRP 相关问题，各垃圾站垃圾产生量可拆分，这导致各个节点都有被访问多次的可能性。本文利用附件一数据绘制散点图观察其分布，如图 1 所示。

依据各个数据点的分布，利用欧式距离分别计算每个垃圾站坐标点相对于处理厂的距离，可以得到对称路网距离矩阵（详见附录），可视化结果如下图所示：

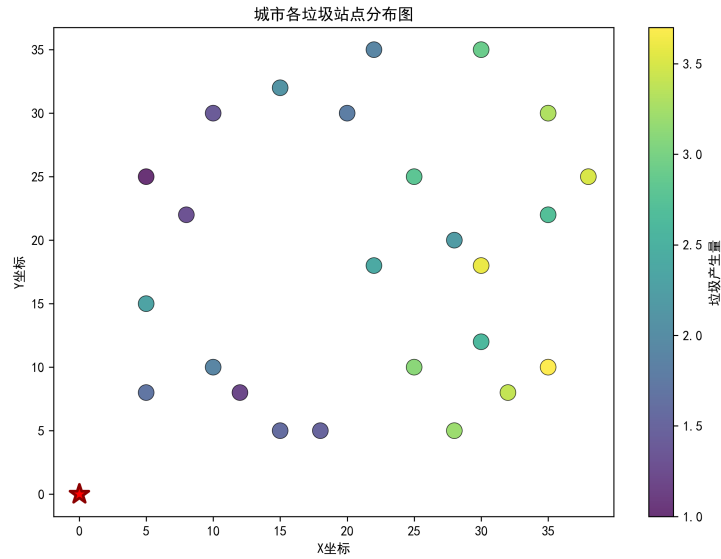


图 1 附件一数据点分布

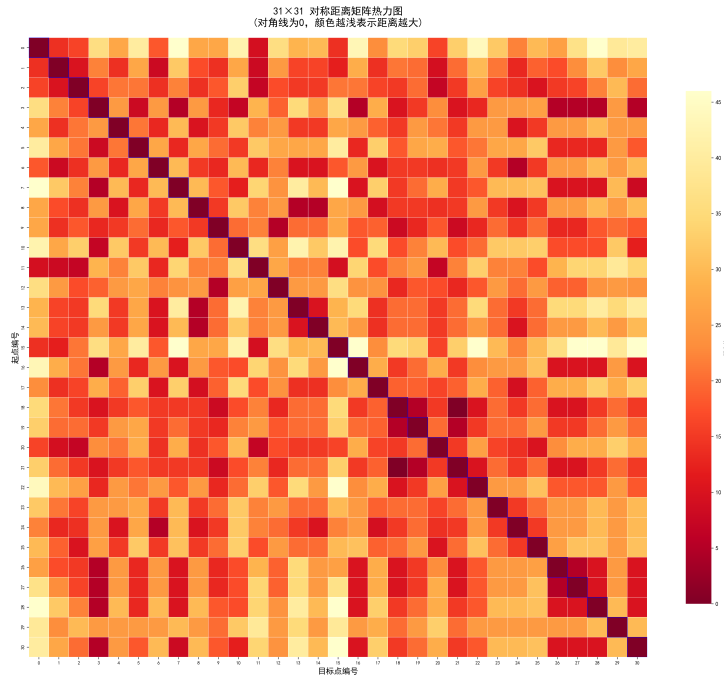


图 2 坐标点距离矩阵热力图

### 5.2.2 启发式算法的选择

通过观察图 1 的各个垃圾站点，发现站点随机分布，且 xy 坐标分布于区间 5 到 35 之间，考虑到给定的收集点数据有 30 组，如果利用穷举法进行优化，可能性种类数预计至少可以达到 30 的阶乘次，同时还可能存在各个垃圾站点的垃圾运输可拆分的情况，数据规模较大，且数据收敛慢，因此本文考虑采用启发式算法。

粒子群算法 (PSO) 从随机解出发，通过迭代追随当前搜索到的最优值寻找全局最优解，并通过适应度来评价解的品质，以其实现容易、精度高、收敛快等优势被学术界

重视。本文采用以粒子群算法帮助寻找最优解。

### 5.2.3 单一车辆最短路径的求解

基于 (8) 式的初步计算, 最小发车量  $K \geq 14$ , 通过对距离矩阵的初步评估, 发现各个点距离处理厂 (原点) 的距离大都大于各相邻点之间的距离, 因此经验判断发车量 (或环数) 应在最小发车量附近为佳。基于传统的 SDVRP 模型思路, 本文首先考虑拆分 0 次的可能性, 通过考虑每个节点只访问一次的情形, 即 CVRP, 综合权衡结论优化度与模型复杂度。利用粒子群算法进行目标优化, 具体算法步骤为:

---

#### 粒子群算法步骤

---

**Step1:** 初始化设定, 粒子数量  $birdNum=50, w, c1$  和  $c2$ ; 随机初始化  $birdNum$  个访问路径 (粒子); 初始化粒子最短路径  $p_k$  和全局最优路径  $g$ ; 最大迭代次数  $i=300$

**Step2:** 设置载重约束和时间约束, 使用贪婪算法, 每个粒子在满足所有约束的基础上, 尽可能地访问下一个节点, 否则返回;

**Step3:** 进行轮盘赌, 更新每一个粒子, 以  $w$  的概率将粒子路径逆序, 以  $c1$  的概率将粒子路径替换为  $p_k$ , 以  $c2$  概率将路径替换为  $g$ ;

**Step4:** 重复步骤 2-3;

**Step5:** 迭代次数达到  $i$  后停止, 输出  $g$ 。

---

最终得到拆分 0 次情形下的全局最短路径约为 1108km, 此时对应的环数 (车辆数)  $K$  为 15 个, 车辆运输垃圾的最短路径图如图 3 所示。

进一步, 考虑存在拆分的情况。SDVRP 的拆分方式一般有两种: 先验拆分策略与过程拆分策略。先验拆分策略是提前制定策略对客户的需求进行分解, 过程拆分策略则是在车辆服务过程中对客户需求进行动态拆分。本文首先利用传统的对半先验概率拆分策略, 设置每一个点的拆分概率均为 50%, 加大迭代次数寻找最优解, 最终得到最优路径为 1091km, 对应的环数  $K$  仍为 15 个。说明拆分步骤具有一定的结论优化度。

之后本文基于微分的思想, 对传统的粒子群算法进行改进, 加入微分拆分, 以求取更贴近实际应用的最优路径。

**Step1:** 拆分: 设置最小拆分单位为 0.1, 保证任一点 (垃圾量/最小拆分单位) 均为整数; 对于每一个点, 拆分为 (垃圾量/最小拆分单位) 个点, 每一点垃圾量为最小拆分单位, 坐标为拆分点坐标  $\pm$  随机小量  $\epsilon$

**Step2:** 设置载重约束和时间约束, 执行粒子群优化算法, 得到局部最优路径  $g$

**Step3:** 替换路径  $g$  的节点为其拆分前对应节点

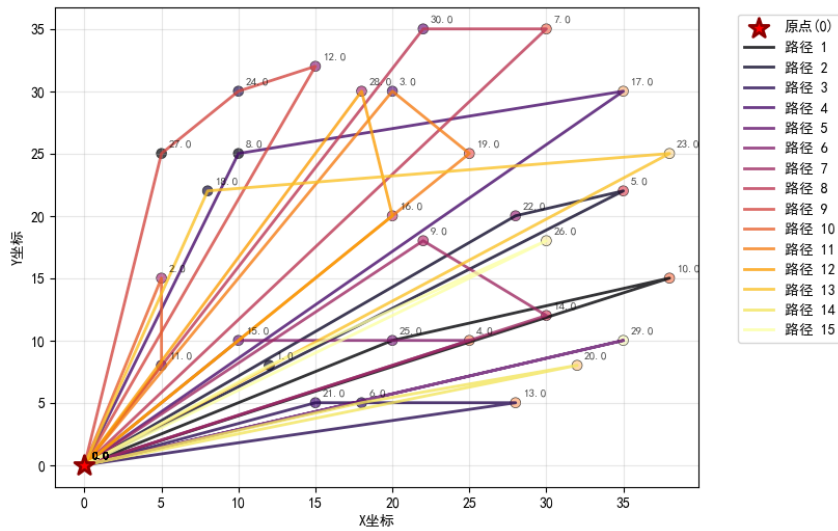


图3 单一车辆不可拆分最短路径

**Step4:** 重排路径，按照最先出现的顺序，交换节点顺序，使相同的节点相邻

**Step5:** 合并相同节点，得到最终路径

最终得到最短路径为 1041km，此时对应的环数（或车辆数）K 为 14 个，最短路径结果如下表所示，详细路径见表 1 所示。

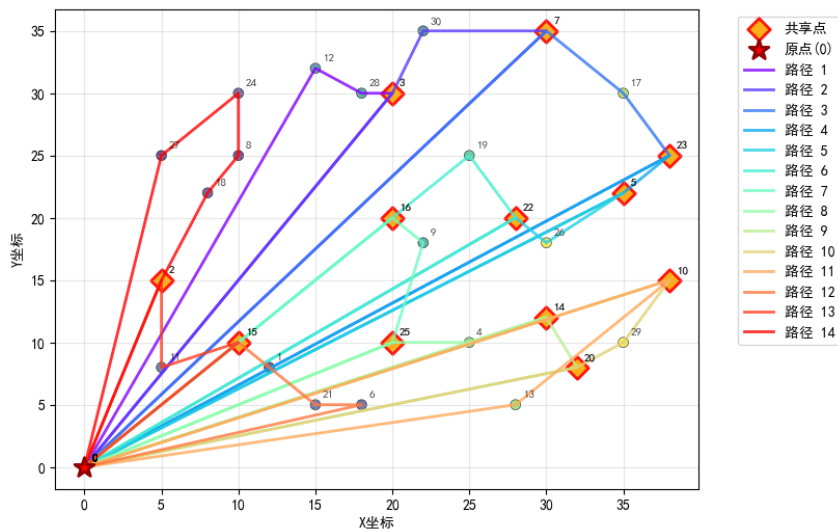


图4 单一车辆可拆分最短路径

### 5.2.4 时间复杂度

根据 CVRP 的优化流程，初始化参数包括收集点个数  $n$ ，粒子个数  $birdNum$  和迭代次数  $i$ 。首先，需要初始化距离邻接矩阵，复杂度为  $n^2$ ，随机初始化的复杂度为  $n * birdNum$ ，接着进入训练过程，一共迭代  $i$  次，每次需要计算  $birdNum$  个粒子的变异，然后计算

表 1 可拆分下的全局最短路径表

路径编号	路径（垃圾点编号）
1	0→12→28→3→0
2	0→3→30→7→0
3	0→7→17→23→0
4	0→23→5→0
5	0→5→26→22→0
6	0→22→19→16→0
7	0→16→9→25→0
8	0→25→4→14→0
9	0→14→20→0
10	0→20→29→10→0
11	0→10→13→0
12	0→6→21→1→15→0
13	0→15→11→2→0
14	0→2→18→8→24→27→0

每个粒子适应度 (遍历  $n$  个收集点)。因此，总复杂度为  $O(n^2 + 2nbirdNum + iter \times (birdNum + nbirdNum))$

拆分的 CVRP(即 SDVRP) 的复杂度计算方法与 CVRP 类似。首先，拆分后点的个数  $n=$  垃圾总重/拆分单位, 优化的复杂度等同于 CVRP, 随后的重排序和合并算法都需要遍历所有节点, 复杂度均为  $n$ , 因此总的复杂度为  $O(n^2 + 2 * n * birdNum + iter * (birdNum + n) + 2 * n)$ , 但由于拆分后  $n$  明显增大, 导致拆分算法的时间复杂度显著大于不拆分的情况。

## 5.3 模型局限性评估

### 5.3.1 模型局限性

当前建立的单一车辆类型 SDVRP 模型未考虑城市交通的动态特性。实际上，城市道路在高峰时段往往会出现严重拥堵，导致实际行驶时间远大于在畅通条件下计算的时间。不同道路等级和时段下的车辆通行速度也存在显著差异，例如市区道路与高速公路在早晚高峰的拥堵程度不同。而模型假定的固定速度或距离度量无法反映这些时变特征，容易导致规划结果与实际运营耗时偏离。

此外，该模型还未考虑调度中的作业时间窗。实际应用场景中，垃圾处理点往往只有在固定的时间段内开放。因此，实际的路径规划需要满足各节点的服务时间窗约束。当前该模型忽略了时间窗限制，可能导致车辆到达时客户尚未开放或已过关闭时间，进而引起等待、改线或服务违约等问题。

### 5.3.2 模型改进方向

针对上述存在的局限性，可以重新建立时变网络和多目标优化的增强型的 VRPTW 模型。理论上，参考动态交通流的研究，可构建包含时变行驶时间和排放目标的多目标 VRP，例如可以利用时变最短路径和动态规划原理，将交通高峰时段的速度曲线融入模型，并同时考虑路程最短、行驶时间最短与排放最低等目标。模型不仅优化距离，还权衡行驶时间与能耗效率，从而更贴近实际运营需求。

引入的新变量可能包括：每辆车在各节点的到达时间和服务开始时间，以及基于出发时刻的道路行驶时间函数。需要添加的新约束包括时间一致性约束、节点服务时间窗约束（如  $Earliest_i \leq t_i \leq Latest_i$ ）。这些约束确保调度方案满足开放时间和道路规则，同时考虑动态交通和环保需求。

## 六、问题二的模型建立与求解

### 6.1 模型建立

#### 6.1.1 多车辆协同运输最优成本模型

问题二需要讨论 4 类垃圾中各类垃圾运输的协同调度，考虑到 4 类专用车辆可独立调度，运行过程互不关联，全局最优成本可以转化为各类车辆的局部最优成本之和。

参考问题一的单一车辆旅行商优化模型，首先对本模型的目标函数进行更新，如下式所示：

$$\min \sum_{k=1}^4 C_k \sum_{r=1}^{K_i} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N d_{ij} x_{ijtk} \quad (11)$$

约束条件方面，考虑到每类车辆存在体积限制  $V_k$ ，因此同样需要限制车辆装载垃圾时的剩余体积，如下式所示：

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N x_{ijtk} w_{jk} / \rho_{jk} \leq V_k (k_t \in m_k) \quad (12)$$

其中， $\rho_{jk}$  指的是 j 垃圾站 k 类垃圾的密度。

各车辆局部最优成本与路程呈正相关，因此仍然需要求取最优路径，这与问题一十分相似。由 (10)、(11)、(12) 式，可以合成得到针对问题二第一小问的综合成本优化模型。

### 6.1.2 加入时间约束的多车辆协同运输最优成本模型

如果约束车辆每日最大行驶时间，为了在规定的垃圾处理厂工作时间内完成作业，可能会导致车辆数变多。在综合成本优化模型的基础上，需要添加如下式所示的约束：

$$\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N d_{ij} x_{ijkt} / 40 \leq T_{\max} (k_t \in m_t) \quad (13)$$

其中， $T_{\max}$  指车辆每日最大行驶时间，按题目要求假定车辆运行速度均为 40km/h。

## 6.2 模型求解

将附件一的一类车辆数据扩展到四类车辆，需要根据四类车辆优化结果综合判断最优成本。考虑到附件中没有给定各个垃圾站垃圾的体积或密度数据，因此需要放松约束 (12)。此外，结合问题一结论发现两模型最优解不明显，拆分效率仅提升约 1.5%，但模型复杂度有显著提升，因此本问求解放松 SDVRP 约束条件，基于问题一的 CVRP 结果，建立各个垃圾站点垃圾运输不拆分的 CVRP 模型，将运量关联与覆盖约束同样放松成为单一访问约束。

$$\sum_{t=1}^K \sum_{i=0}^N x_{ijt}^k = 1 \quad (14)$$

综合优化模型如下式所示。

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{k=1}^4 C_k \sum_{r=1}^{K_t} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N d_{ij} x_{ijtk} \\
& s.t. \left\{ \begin{aligned}
& \sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{0jt}^k = \sum_{t=1}^K \sum_{j=1}^N x_{j0t}^k = K, \\
& \sum_{i=0}^N x_{ijt}^k = \sum_{i=0}^N x_{jit}^k, \\
& \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N x_{ijt}^k w_j^k \leq Q, \\
& \sum_{t=1}^K \sum_{i=0}^N x_{ijt}^k = 1, \\
& K \geq \frac{\sum_{j=1}^N w_j}{Q}
\end{aligned} \right. \quad (15)
\end{aligned}$$

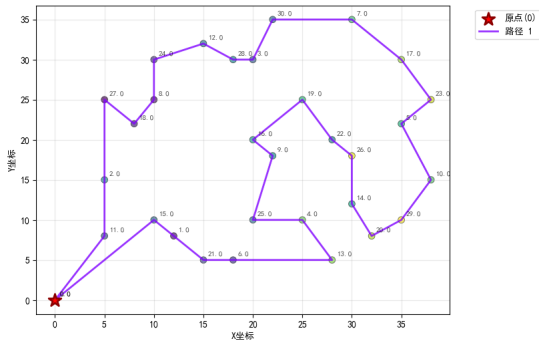
其中,  $t \in m, k = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, \dots, N$ 。

因为四类车辆的运输是完全独立的, 因此拓展问题一的 CVRP 粒子群算法, 分别对每一类车辆分别求取局部最优解, 四类车辆的局部最优解如下表所示。

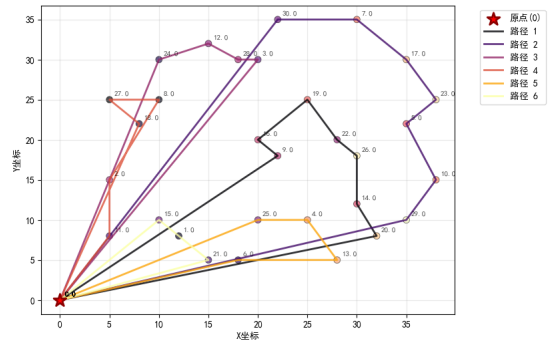
**表 2 垃圾分类成本分析表**

类别	局部最小成本 (元)	K 值	全局最小成本 (元)
厨余垃圾	1111.5	6	2958.3
可回收物	449.0	2	
有害垃圾	901.0	1	
其他垃圾	496.8	3	

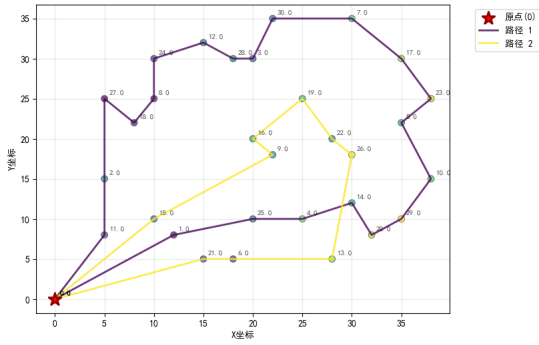
由于各类别的垃圾运输相互独立, 通过四个局部最优解加和, 得到全局最优成本为 2958.3 元。同时, 还能得到如下图所示的各类垃圾运输路径图:



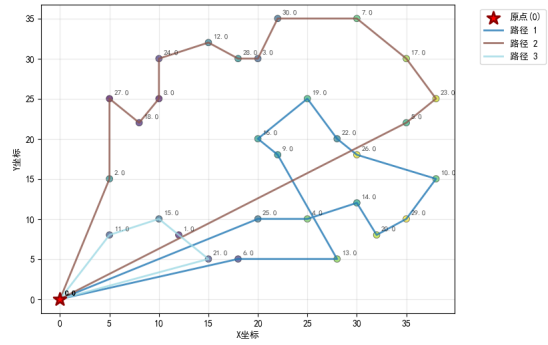
(a) 有害垃圾车辆运输路径



(b) 厨余垃圾车辆运输路径



(c) 可回收物车辆运输路径



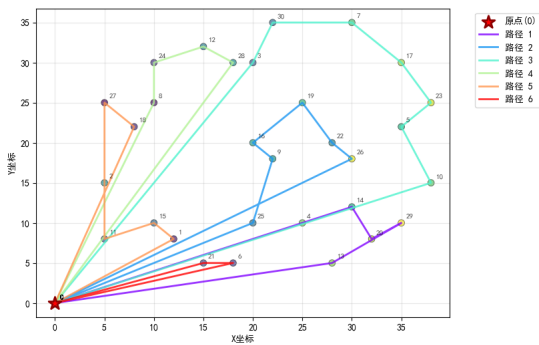
(d) 其他垃圾车辆运输路径

图5 四类垃圾车辆最短运输路径图

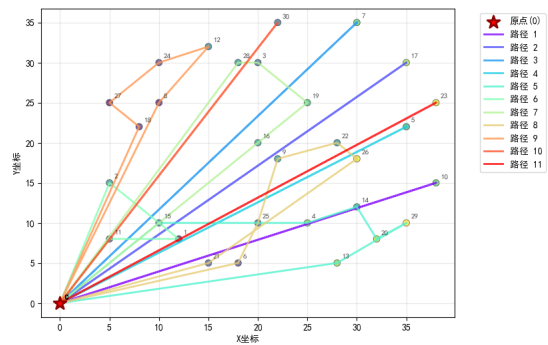
### 6.3 加入时间约束的最优成本模型分析

加入“车辆每日最大行驶时间”约束后，本模型需要在(16)式的基础上加入(14)式作为一个新的约束。同样由于各类车辆之间的运输完全独立，仍然可以如上述求解所示的求取四类垃圾的局部最优解。

考虑到处理厂的时间窗口为12h，以厨余垃圾为例，分别设置车辆最大行驶时间为6h、2h去选择最优路径，并对比最小成本以及环数(派车数)的变化，发现最小成本1312元增加到了2191元，路径环由下图所示：



(a) 6小时最优路径



(b) 2小时最优路径

图6 厨余垃圾最优路径环图

由图可知，当最大行驶时间从 6h 缩短至 2h 时，厨余垃圾最优路径的运输距离迅速增加，运输成本增加约 879 元，派车数从 6 上涨到了 11，表明加入最大行驶时间约束后，例如垃圾车遭遇到拥堵、绕行等意外情况时，会存在因时间不足需要将运输路径拆分成多次任务执行的情况。

## 七、问题三的模型建立与求解

### 7.1 模型建立

问题三中，中转站选址、垃圾收集点分配、车辆运输路径以及碳排放等都是需要综合考虑的因素，因此需要将优化模型的目标调整为最小化日运输成本、中转站建设成本与碳排放成本之和。其中，运输成本主要由车辆行驶距离及不同垃圾类型车辆的单位运输成本共同决定，若纳入碳排放，则需在目标函数中增加相应的碳排放成本项；中转站建设成本为若干固定成本  $T_h$ 。

首先在对相关变量做以下定义。由于碳排放成本取决于累计距离与车辆载重，因此需要对累计距离做如下定义：

$$D_{it} = \begin{cases} D_{it} + d_{ij} - G(1 - x_{ijt}) \leq D_{jt} \quad (t \in K, \forall (i, j), G \rightarrow \infty) \\ 0, \text{当 } i = 0 \text{ 时} \end{cases} \quad (16)$$

其次，需要在约束条件中添加节点分配约束：垃圾收集点  $i$  要么分配给中转站  $h$  要么分配给处理厂。

$$z_{iht} + z_{i0t} = 1, \quad (17)$$

其中， $M$  为选中的中转站数量。表示车辆  $r$  在客户点  $i$  要么分配给中转站  $h$  要么分配给处理厂 ( $h = 1, 2, \dots, M$ )

而中转站也有容量限制，因此分配给中转站  $h$  的垃圾收集点  $i$  的垃圾收集量总和不应超过中转点容量。

$$\sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^M w_i^k z_{iht} \leq T_h^k \quad (h = 1, 2, \dots, M, k = 1, 2, 3, 4) \quad (18)$$

此外，对于每辆车在中转站和处理厂之间的运输还存在时间窗的约束，即车辆到中转点  $h$  的时间必须在对应中转站的固定时间窗口：

$$s_{it} + t_{ij} - J(1 - z_{ijt}) \leq s_{jt} \quad (t \in m, \forall (i, j), J \rightarrow \infty) \quad (19)$$

其中， $t_{ij}$  表示地点  $i$  行驶到地点  $j$  的时间， $s_{it}$  表示车辆  $r$  在地点  $i$  的时刻， $s_{ht} \in [a_h, b_h]$ ,  $h = 1, 2, \dots, M, t \in m$

同时，在 CVRP 综合优化模型 (16) 的基础上，为了简化模型，本文考虑建立两阶段模型。第一阶段仅考虑中转站选址和各收集点对应的中转站分配。第二阶段针对每个中转站，优化各类型车辆运输路径。

### 1) 第一阶段

通过最小化各类型车辆运输成本、固定成本之和确认中转站选址地点。目标函数如下式所示：

$$\min C \left( \sum_{k=1}^K \left( \sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{h=1}^M d_{iht} z_{iht} + \sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N d_{i0t} z_{i0t} \right) \right) + \sum_{h=1}^M T_h / 3650 \quad (20)$$

### 2) 第二阶段

对于成本与碳排放进行多目标优化。针对每一个中转站内部，首先最小化各类型车辆运输成本，并在此基础上最小化各类型车辆碳排放，之后将优化结果反馈于优化运输成本，不断寻找帕累托最优解。目标函数如下式所示：

$$\begin{cases} \min \sum_{k=1}^4 C_k \left( \sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{h=0}^M d_{iht} x_{iht} \right) \\ \min \left( \sum_{k=1}^4 \left( \left( \sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{h=0}^M d_{iht} x_{iht} \right) \cdot \alpha_k + \left( \sum_{t=1}^K \sum_{i=1}^N \sum_{h=0}^M \omega_i D_{iht} \right) \cdot \beta_k \right) \right) \end{cases} \quad (21)$$

## 7.2 模型求解

### 7.2.1 中转站的选址以及各垃圾站的分配

基于第一阶段的选址优化模型，依据 (17) - (21) 式改进模型。为了给 30 个垃圾收集点分配对应的中转站或者处理厂，首先采用无监督算法 k-means 聚类将垃圾收集点分类。分别取 k=2,3,4,5,6,7,8，对每个固定 k 值形成的各个簇集合随机分配给中转站或者处理厂，通过设定一阶段目标函数作为惩罚项，并为该类分配惩罚项最小的点。同时，为了确定 k 的最佳取值，将得到的惩罚项加总，在去除掉重复的固定成本后，选择最小惩罚项对应的 k 值。

最终，对多个类的惩罚项进行评估，得到如下表所示的结果。

我们发现 k=6 时惩罚项最小。在该情况下，总共需要 4 个中转站，编号分别为 31, 33, 34, 35。聚类结果如下图所示：

表 3 各簇集合对应的总惩罚项

类别数 k	总惩罚项
2	4277.37
3	3618.24
4	3739.61
5	3666.44
6	3463.82
7	3539.71
8	3528.91

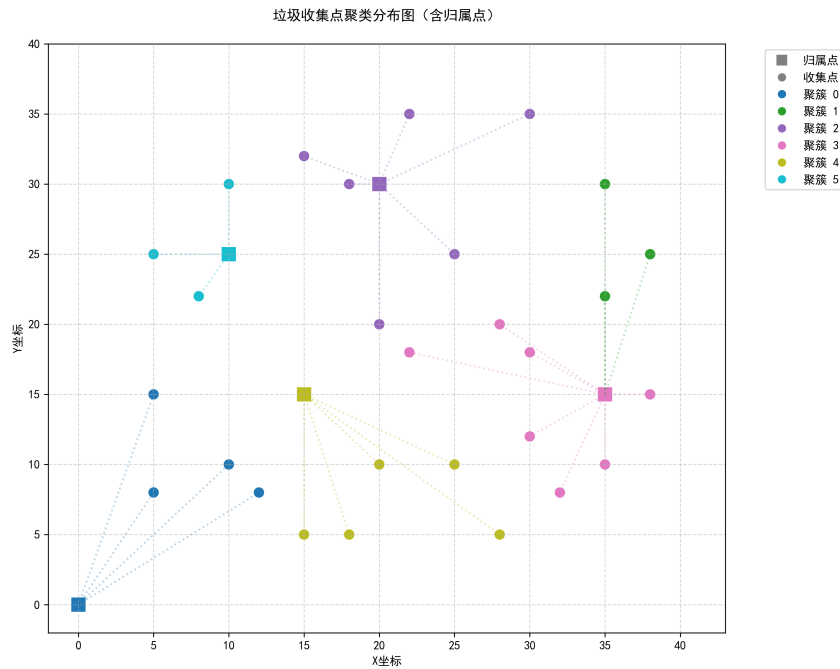


图 7 垃圾站分配聚类结果

## 7.2.2 最优车辆运输路径的求解

### 1) 二维优化算法设计

基于 (21) 式，对于多目标优化的求解，本问通过优化-反馈-优化的二维优化路径算法设置，不断寻找帕累托最优解。相比于独立的单目标优化，二维优化有很显著的优势，可以避免局部最优问题，通过两个优化目标的相互反馈，可以避免路程优化时忽略碳排放目标的问题；在本问题中，基于行驶成本-碳排放的综合优化问题，两个模型的输入和输出均为路径，因此可以互相输入输出，形成二维优化。

算法思路：

## 二维算法步骤

- Step1:** 设置距离目标和碳排放目标；设置载重约束和时间约束；设置双层迭代次数  $i$ ；
- Step2:** 以距离目标为适应度，使用粒子群算法，输出局部最短路径  $g1$ ；
- Step3:** 以碳排放目标为适应度，使用  $g1$  初始化粒子群，输出局部碳排放最少路径  $g2$ ；
- Step4:** 以  $g2$  初始化粒子群，重复步骤 2,3；
- Step5:** 当迭代次数达到  $i$ ，停止，输出  $g1$  和  $g2$ 。

### 2) 各中转站类内垃圾采集与运输的优化路径

首先针对第二阶段垃圾收集点的路径优化，对比结果，我们发现可回收物、有害垃圾、其他垃圾路径在各收集点始终保持一致，厨余垃圾则有稍许变化。为此，我们将可回收物、有害垃圾、其他垃圾归为一类，厨余垃圾本身为一类，作出两张路径图，并用箭头表示前进方向。同时，由于垃圾车在达到垃圾收集点前保持空载，根据三角形两边长大于第三边的原则，将原本从中转站出发的线路移动到由处理厂出发，进一步优化。如图所示。如图所示，图 (a) 为

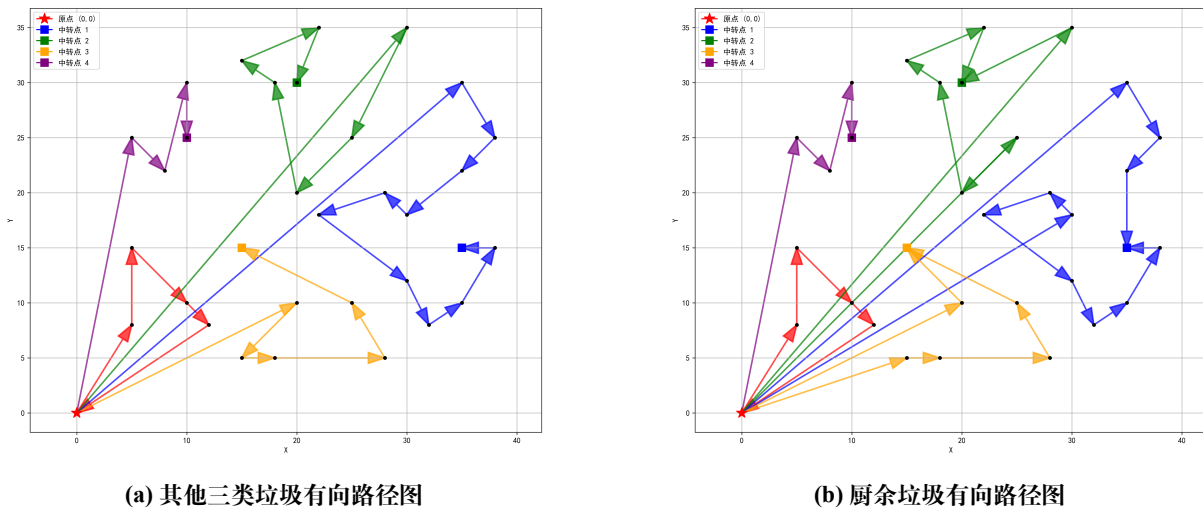


图 8 有向路径图

为了研究是否存在垃圾车在中转站无法停靠的情况，我们计算出每个中转站对应处理点的路径，并根据速度恒定算出时间。其中箭头表示垃圾车需要的时间，颜色柱代表不同中转站的时间窗口。我们发现并不存在某个中转站，出现箭头超过颜色柱的情况。时间规划最紧急的为 (35,15)，垃圾车途中仅有半小时的等待时间，否则就会错过该时间窗口。

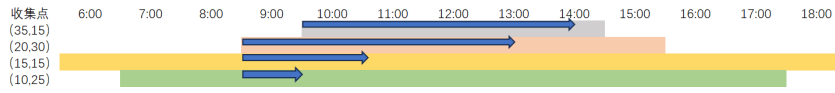


图9 中转站时间分配

### 3) 垃圾向处理厂转运的优化路径

其次针对第二阶段中转站和处理厂的路径优化，我们分别作出可回收物、有害垃圾、其他垃圾、厨余垃圾各自的路径图。由于此时存在中转站容量大于垃圾车容量的情况，我们采用可拆分算法。根据结果我们发现，其中可回收物、其他垃圾、厨余垃圾均存在拆分情况。结果表明，帕累托最优解为运输成本 4818 元和碳排放 2165kg。

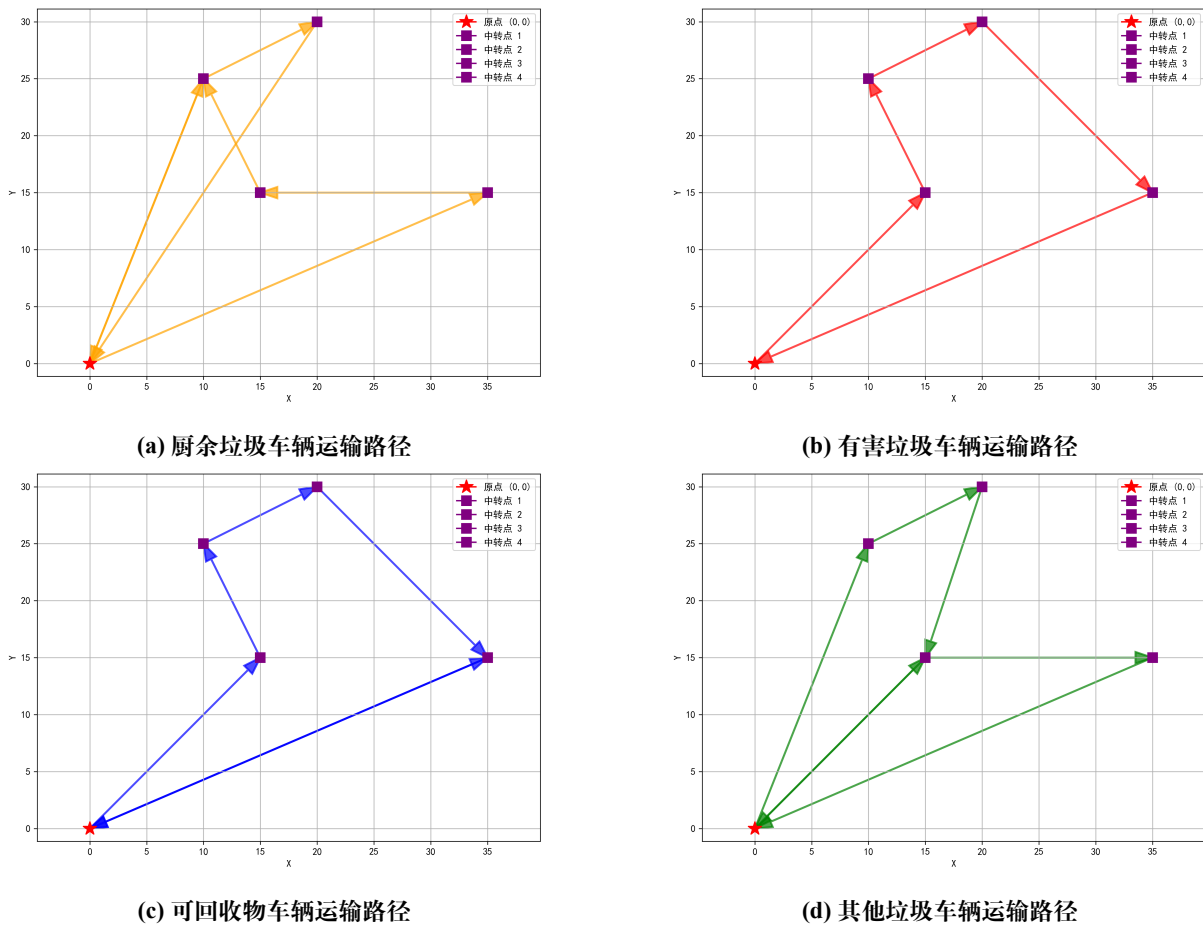


图10 四类垃圾车辆最短运输路径图

显而易见，中转站选址与分配会影响下一阶段的路径优化。例如离中转站越近的点往往最后才被选中。但同时，对于分配给中转站的手机厂，其容量加和必须满足小于中转站对应的垃圾容量。对于超出的情况，往往选择分离与处理厂最近的收集点。故而，两阶段存在内在的关联与协同机制。

### 7.3 加入非对称约束的模型改进

通过分析附件 5 禁行路段的设计，单行道与禁行时段都将导致车辆绕行，这需要将对称矩阵的大小根据绕行距离的变化进行改进，将对称距离矩阵转变为非对称距离矩阵，在重新优化的过程中需要纳入非对称距离矩阵的计算以确定成本最低、碳排放最少的帕累托最优路径。

根据实际情况，我们发现由于收集点 27、28 和收集点 9、16 并不属于一类，同时在收集点 23 所在类中，处理厂与收集点 17 直接相连，并未与收集点 23 直接联通，因此约束条件仅有收集点 4 和中转站 31 有效。为此，我们分析第二阶段的两次路径优化，第二次路径优化并未受其影响。影响的仅有第一次路径优化中中转站 31 所在垃圾收集点的路径。根据结果，我们发现从收集点到中转站距离的增长，导致该路径不再选择收集点 4 连接中转站，反之选择了 25 作为连接点。最终，生成了如下图所示的路径图

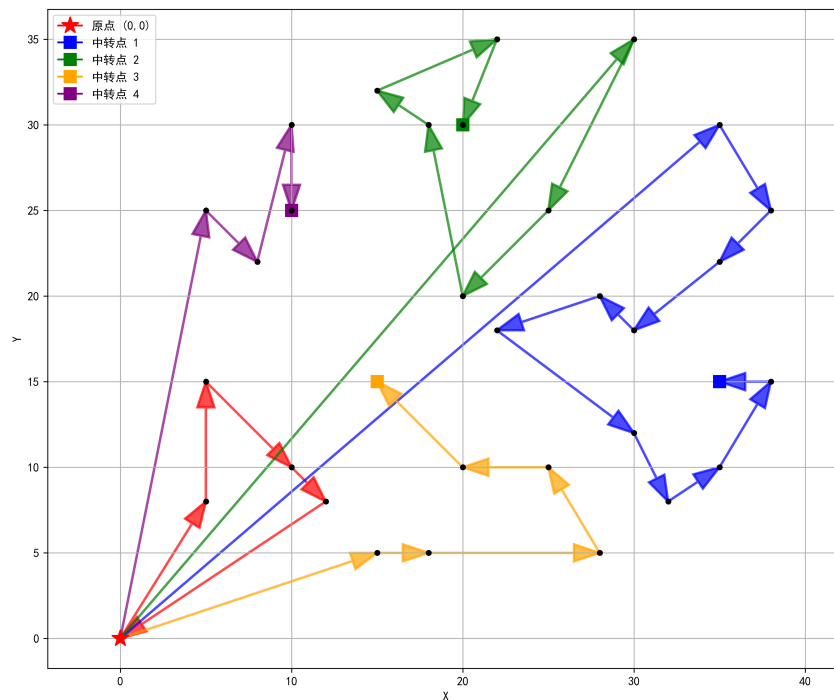


图 11 单行道约束下的三类垃圾路径图

SDVRP 模型的时间复杂度计算：

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{拆分点个数 } n = \text{总重量} / \text{拆分单位} = 700 \\ \text{计算距离邻接矩阵} : n^2 \\ \text{随机初始化} : n * \text{birdNum} \\ \text{计算适应度} : \text{birdNum} * n \\ \text{交叉变异} : 1 \\ \text{训练} : \text{iter} * (\text{birdNum}(\text{变异次数}) + n(\text{计算适应度})) \\ \text{重排序} : n \\ \text{合并} : n \\ \text{总复杂度} = n^2 + 2 * n * \text{birdNum} + \text{iter} * (\text{birdNum} + n) + 2 * n \end{array} \right.$$

根据已有模型， $n=700$ ，可以初步计算出对称路网的模型复杂度为 786400。

而对于非对称矩阵与对称矩阵的复杂度差异对比，具体分析如下表所示：

**表 4 对称与非对称矩阵的模型复杂度对比**

特性	对称矩阵	非对称矩阵
是否满足 $d_{ij}=d_{ji}$	是	否
存储成本	低，只需上三角或下三角	高，需全矩阵
算法实现复杂度	较低	较高，需考虑方向性
应用范围	理想路径、等距问题	实际交通路径、城市配送网络

## 八、模型的检验

### 8.1 对 CVRP 基础模型的检验

本文的优化算法基于粒子群模型，模型的超参数有 4 个，分别是粒子数量，惯性权重，自我认知权重和社会认知权重。我们根据不同超参数选择下模型的收敛速度，分析不同超参数的敏感度。

初始设定为粒子数 =50, 惯性权重  $w=0.2$  自我认知权重  $c1=2$  社会认知权重  $c2=2$ 。不断增大参数  $w$ ，得到如下图所示的收敛速度曲线。

由上图可知，对于参数  $w$ ，随着  $w$  增大，收敛速度逐渐增大，当  $w=0.6$  时，收敛速度最快。表明本模型的惯性权重设置较为合理。其他参数分析方法类似：对于参数  $c1$ ，随着  $c1$  提高，收敛速度加快，但收敛到的水平也相应变低；对于参数  $c2$ ，随着  $c2$  提高，收敛速度显著加快。一般来说，提高粒子数能够有效提高收敛水平，但是会增大计算开销。

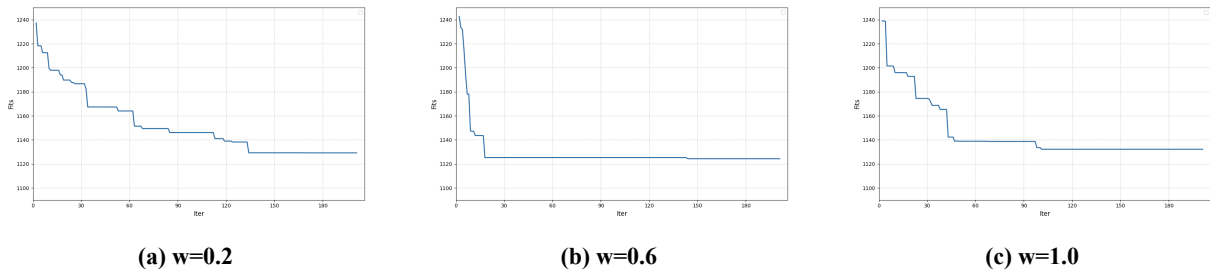


图 12 CVRP 收敛曲线

## 九、模型的评价与推广

### 9.1 模型的优点

- **优点 1** 1. 多问题场景的适应性：本研究针对是否可拆分运输、多种垃圾分类、时间约束、中转站选址和多目标优化等不同场景分层构建了优化模型，能够灵活适应垃圾分类运输中的多样化需求。
- **优点 2** 创新性算法设计：本研究创新性地提出了基于微分思想的后验拆分策略，显著降低了运输次数，提高了运输效率；将聚类算法引入了中转站选址，显著降低了运算复杂度。
- **优点 3** 多目标协同优化：本研究针对问题三提出两阶段算法，第一阶段通过带有惩罚项的聚类分析算法优化中转站选址，第二阶段结合碳排放目标进行二维多目标路径规划，避免了单一目标的局部最优解，具有启发性。

### 9.2 模型的缺点

- **缺点 1** 假设垃圾站垃圾量可完全拆分，但实际场景中可能存在不可拆分的约束（如容器容量限制），导致模型部分结果偏离实际。对时间窗约束做了一定简化，未考虑高峰时段车辆速度变化对路径规划的影响。
- **缺点 2** 算法复杂度与求解精度平衡不足：问题三的两阶段算法中，中转站选址依赖聚类分析，但未充分考虑候选点的实际地理分布和建设成本差异，可能陷入局部最优。在拆分策略中，拆分的精度导致模型的求解复杂度较高，并且由于相邻点分布密集，降低了粒子群演化的效率。

### 9.3 模型的推广

- 1、增强动态适应性，包括引入更复杂的约束模型来考虑时间窗口等约束，增加装卸时间、车辆故障率等随机因素，构建更加灵活和稳健的优化模型。
- 2、提高运算效率，包括在拆分场景的粒子群优化算法中引入记忆机制，避免粒子在相同节点内部演化，通过大规模并行运算提高二维优化算法的效率等。

## 参考文献

- [1] SITEK P. A hybrid approach to the two-echelon capacitated vehicle routing problem (2e-cvrp)[J]. Springer International Publishing, 2014.
- [2] MARIANO, FRUTOS, FERNANDO, et al. A new approach to the optimization of the cvrp through genetic algorithms[J]. American Journal of Operations Research, 2012, 2(4): 495-501.

## 附录 A 对称路网的距离矩阵表

地点编号	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	0	14	16	36	27	40	18	46	27	27	42	9	36	29	30	14	43	23	35	33	16	33	44	32	22	30	26	37	46	39	40
1	14	0	10	22	14	27	8	32	17	14	27	8	25	16	16	12	28	14	21	20	9	20	30	21	13	19	17	23	32	23	27
2	16	10	0	16	21	21	14	22	14	18	33	7	17	15	15	21	21	16	15	20	7	15	26	16	14	10	15	16	22	30	20
3	36	22	16	0	25	8	25	5	25	13	7	29	19	35	25	36	5	28	10	15	23	10	13	25	25	26	5	5	5	25	5
4	27	14	21	25	0	21	13	30	10	15	32	22	25	15	15	27	25	19	15	25	21	15	25	25	10	15	25	25	30	25	25
5	40	27	21	8	21	0	27	13	27	20	15	32	27	27	27	40	13	33	18	27	28	18	21	27	27	32	13	13	13	25	18
6	18	8	14	25	13	27	0	30	15	13	30	13	22	10	10	18	25	10	15	15	14	15	25	15	5	15	25	25	30	25	30
7	46	32	22	5	30	13	30	0	30	18	12	34	24	40	30	46	10	33	15	20	28	15	18	30	30	31	10	10	10	30	8
8	27	17	14	25	10	27	15	30	0	15	32	22	25	5	5	27	25	9	15	15	14	15	25	15	10	15	25	25	30	25	30
9	27	14	18	13	15	20	13	18	15	0	20	22	5	20	20	27	18	19	8	13	18	8	13	20	15	20	13	13	18	20	18
10	42	27	33	7	32	15	30	12	32	20	0	36	26	42	32	42	17	35	17	22	30	17	20	32	32	33	17	17	17	32	12
11	9	8	7	29	22	32	13	34	22	22	36	0	27	22	22	9	34	17	22	25	7	22	33	22	22	17	29	34	34	39	34
12	36	25	17	19	25	27	22	24	25	5	26	27	0	25	25	36	24	24	13	18	17	13	18	25	20	25	19	19	24	25	24
13	29	16	15	35	15	27	10	40	5	20	42	22	25	0	10	29	35	14	20	20	15	20	35	20	15	20	35	35	40	35	40
14	30	16	15	25	15	27	10	30	5	20	32	22	25	10	0	30	25	14	20	20	15	20	25	20	10	20	25	25	30	25	30
15	14	12	21	36	27	40	18	46	27	27	42	9	36	29	30	0	46	23	35	33	16	33	46	30	22	30	36	46	46	39	46
16	43	28	21	5	25	13	25	10	25	18	17	34	24	35	25	46	0	28	15	20	28	15	23	25	25	31	10	10	10	25	10
17	23	14	16	28	19	33	10	33	9	19	35	17	24	14	14	23	28	0	19	19	16	19	28	19	9	19	28	28	33	28	33
18	35	21	15	10	15	18	15	15	15	8	17	22	13	20	20	35	15	19	0	5	15	0	10	20	15	20	10	10	15	20	15
19	33	20	20	15	25	27	15	20	15	13	22	25	18	20	20	33	20	19	5	0	20	5	15	20	20	25	15	15	20	25	20
20	16	9	7	23	21	28	14	28	14	18	30	7	17	15	15	16	28	16	15	20	0	15	26	16	14	10	23	28	28	33	28
21	33	20	15	10	15	18	15	15	15	8	17	22	13	20	20	33	15	19	0	5	15	0	10	20	15	20	10	10	15	20	15
22	44	30	26	13	25	21	25	18	25	13	20	33	18	35	25	46	23	28	10	15	26	10	0	25	25	31	18	18	18	25	18
23	32	21	16	25	25	27	15	30	15	20	32	22	25	20	20	30	25	19	20	20	16	20	25	0	15	20	25	25	30	25	30
24	22	13	14	25	10	27	5	30	10	15	32	22	20	15	10	22	25	9	15	20	14	15	25	15	0	15	25	25	30	25	30
25	30	19	10	26	15	32	15	31	15	20	33	17	25	20	20	30	31	19	20	25	10	20	31	20	15	0	26	31	31	25	31
26	26	17	15	5	25	13	25	10	25	13	17	29	19	35	25	26	10	28	10	15	23	10	18	25	25	26	0	5	10	25	10
27	37	23	16	5	25	13	25	10	25	13	17	34	19	35	25	37	10	28	10	15	28	10	18	25	25	31	5	0	10	25	10
28	46	32	22	5	30	13	30	10	30	18	17	34	24	40	30	46	10	33	15	20	28	15	18	30	30	31	10	10	0	30	10
29	39	23	30	25	25	25	25	30	25	20	32	39	25	35	25	39	25	28	20	25	33	20	25	25	25	25	25	25	30	0	30
30	40	27	20	5	25	18	30	8	30	18	12	34	24	40	30	46	10	33	15	20	28	15	18	30	30	31	10	10	10	30	0

**附录 B 各收集点的中转站分配结果表**

收集点编号	处理厂	中转站 31	中转站 32	中转站 33	中转站 34	中转站 35
1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	1	0	0
11	1	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	1
13	0	1	0	0	0	0
14	0	0	0	1	0	0
15	1	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	1
17	0	0	0	1	0	0
18	0	0	0	0	1	0
19	0	0	0	0	0	1
20	0	0	0	1	0	0
21	0	1	0	0	0	0
22	0	0	0	1	0	0
23	0	0	0	1	0	0
24	0	0	0	0	1	0
25	0	1	0	0	0	0
26	0	0	0	1	0	0
27	0	0	0	0	1	0
28	0	0	0	0	0	1
29	0	0	0	1	0	0
30	0	0	0	0	0	1